Материалы для проведения заключительного этапа

XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2015–2016 учебный год

Первый день

Санкт-Петербург, 21–29 апреля 2016 г.

Москва, 2016

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гаврилюк, А. А. Гайфуллин, Н. А. Гладков, А. С. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, Е. Ю. Иванова, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, П. В. Мартынов, А. Д. Матушкин, В. В. Мокин, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, В. А. Омельяненко, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. А. Решетников, И. С. Рубанов, Р. Р. Садыков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Н. В. Чернега, К. В. Чувилин, О. И. Южаков, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензенты: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв, к. ф.-м. н. Б. В. Трушин.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, К. В. Чувилин.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.) (*Г. Жуков*)

Ответ. Обманывает.

Решение. Назовём ковёр, все стороны которого больше 1, *большим*, а ковёр, все стороны которого меньше 1, — *маленьким*. Таким образом, изначально у путешественника был один большой ковёр. Докажем, что общее число больших и маленьких ковров у путешественника не уменьшается; отсюда следует, что описанная ситуация невозможна. Для этого достаточно рассмотреть только случай, когда путешественник отдаёт меняле большой или маленький ковёр.

При обменах первого вида большой ковёр меняют на маленький, а маленький — на большой. Поэтому общее количество больших и маленьких ковров не уменьшается.

Рассмотрим обмены второго вида. При обмене большого ковра $a \times b$ путешественник получит ковры $a_1 \times b$ и $a_2 \times b$. Если $0 < a_1, a_2 \leqslant 1$, то $a = a_1 a_2 \leqslant 1$, что неверно. Учитывая неравенство $b > 1$, получим, что хотя бы один из новых ковров будет большим. Аналогично, при обмене маленького ковра хотя бы один из новых ковров будет маленьким. Значит, при таком обмене общее количество больших и маленьких ковров также не уменьшается.

9.2. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S

и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

(*И. Богданов, П. Кожевников*)

Решение. Если $\ell \parallel BC$, утверждение очевидно в силу симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC.

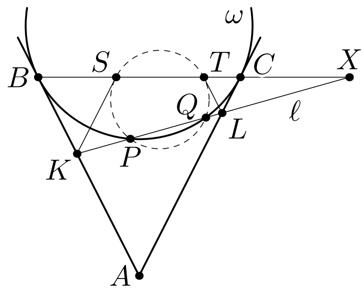


Рис. 1

Пусть теперь прямые ℓ и BC пересекаются в точке X (см. рис. 1). Из параллельности получаем $\frac{XB}{XT} = \frac{XK}{XL} = \frac{XS}{XC}$, откуда $XT \cdot XS = XB \cdot XC$. Поскольку точки B, C, P и Q лежат на ω, имеем $XB \cdot XC = XP \cdot XQ$. Получаем, что $XT \cdot XS = XP \cdot XQ$; это и означает, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

Замечание. Можно показать, что полученная окружность касается прямых KS и LT в точках S и T соответственно.

9.3. Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s-1$ чисел оказалась равной $N-2$. Какие значения могло принимать N?

(*А. Кузнецов*)

Ответ. $N = 3$.

Решение. Заметим сразу, что $d_{s+1-i} = N/d_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Число $d_{i+1} - d_i$ делится на НОД(d_i, d_{i+1}), так что НОД$(d_i, d_{i+1}) \leqslant d_{i+1} - d_i$. При $i = 1, \ldots, s-1$ обозначим $r_i = (d_{i+1} - d_i) -$ НОД$(d_i, d_{i+1}) \geqslant 0$. Согласно условию,

$$(d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \ldots + (d_s - d_{s-1}) = d_s - d_1 = N - 1$$

и

$$\text{НОД}(d_1, d_2) + \text{НОД}(d_2, d_3) + \ldots + \text{НОД}(d_{s-1}, d_s) = N - 2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $r_1 + \ldots + r_{s-1} = 1$. Это означает, что $r_k = 1$ для некоторого k, а все остальные r_i равны нулю.

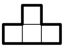
Итак, $1 = (d_{k+1} - d_k) - \text{НОД}(d_k, d_{k+1})$. Правая, а потому и левая часть этого равенства делится на $\text{НОД}(d_k, d_{k+1})$, поэтому $\text{НОД}(d_k, d_{k+1}) = 1$ и $d_{k+1} - d_k = 2$. Это возможно, только если каждое из чисел d_k и d_{k+1} нечётно.

Так как d_k и d_{k+1} — два последовательных делителя числа N, то $\dfrac{N}{d_{k+1}}$ и $\dfrac{N}{d_k}$ — тоже два последовательных делителя числа N. Поэтому, если $\dfrac{N}{d_{k+1}} = d_m$, то $\dfrac{N}{d_k} = d_{m+1}$. При этом

$$\text{НОД}(d_m, d_{m+1}) = \frac{N}{\text{НОК}(d_k, d_{k+1})} = \frac{N \cdot \text{НОД}(d_k, d_{k+1})}{d_k d_{k+1}} < \\ < \frac{N(d_{k+1} - d_k)}{d_k d_{k+1}} = d_{m+1} - d_m.$$

Значит, $r_m > 0$, что возможно лишь при $k = m$ (и, следовательно, $s = 2k$).

Итак, $d_{k+1} = \dfrac{N}{d_k}$, то есть число $N = d_k d_{k+1}$ нечётно. Но тогда $d_{s-1} \leqslant \dfrac{N}{3}$, откуда $\text{НОД}(d_{s-1}, d_s) \leqslant d_{s-1} \leqslant \dfrac{N}{3}$. Следовательно, $1 \geqslant r_{s-1} \geqslant \dfrac{2N}{3} - \dfrac{N}{3} = \dfrac{N}{3}$, т. е. $N \leqslant 3$. Поскольку $N > 1$, получаем единственно возможное значение $N = 3$, которое, как легко убедиться, удовлетворяет условию.

9.4. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырёхклеточную фигурку вида  — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.) (*С. Берлов*)

Первое решение. Представим себе, что доминошки (прямоугольники 1×2) ещё не вырезаны, и будем вырезать их по одной. В каждый момент процесса назовём *ценой* ещё не вырезанной клетки число её невырезанных соседей по стороне, уменьшенное на 2 (например, цена неугловой клетки, лежащей на границе квадрата, изначально равна 1). Тогда исходная цена каждой клетки есть $2 - t$, где t — количество отрезков периметра квадрата, находящихся на границе этой клетки. Значит, исходная суммарная цена всех клеток равна $2 \cdot 100^2 - 400 = 19\,600$.

Проследим, как изменяется суммарная цена S всех невырезанных клеток после вырезании доминошки. При этом выкидываются две клетки (сумма цен которых не превосходит $2+2=4$), а также уменьшаются на 1 цены клеток, граничащих с доминошкой (которых не больше шести). Поэтому после вырезания доминошки S уменьшается не более, чем на 10.

Итак, после вырезания 1950 доминошек S станет не меньше, чем $19\,600 - 1950 \cdot 10 = 100$. Значит, найдётся невырезанная клетка k, цена которой положительна. Это значит, что у k не менее трёх невырезанных соседей. Тогда k вместе с этими тремя соседями образует требуемую фигурку.

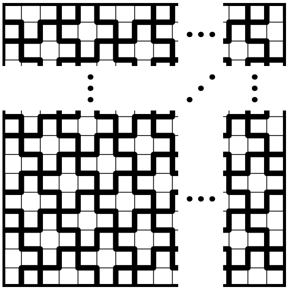


Рис. 2

Второе решение. Назовём требуемую фигурку T-*тетрамино*.

Мысленно разобьём наш квадрат на фигурки (см. рис. 2). Нетрудно подсчитать, что вне «полных» крестов окажется ровно $4 \cdot 100 = 400$ клеток, из которых 320 будут находиться в T-тетрамино разбиения. Итого, в разбиении есть $(100^2-400)/5 = 1920$ полных крестов и ещё 80 T-тетрамино.

Рассмотрим теперь, куда попадают клетки вырезанных доминошек. Предположим, что из каждого полного креста было вырезано хотя бы по две клетки, а из каждого T-тетрамино разбиения — хотя бы одна. Тогда общее число вырезанных клеток было бы не меньше, чем $1920 \cdot 2 + 80 = 2 \cdot 1960$, что неверно.

Значит, либо из некоторого T-тетрамино не вырезано ни одной клетки, либо из некоторого креста вырезано не более одной клетки. В первом случае мы уже нашли T-тетрамино, которое можно вырезать. Во втором же случае, если из креста и вырезана одна клетка, то она не может быть центральной (иначе вторая клетка той же доминошки также лежала бы в кресте). Значит, даже если клетка креста вырезана, остаток его как раз и является T-тетрамино. В обоих случаях мы добились требуемого.

10 класс

10.1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей? (*А. Грибалко*)

Ответ. Нет, не сможет.

Решение. Пусть x и y — общее число матчей, сыгранных внутри Восточной и Западной конференций соответственно, а z — число матчей между командами разных конференций. Нам надо доказать, что равенство $z = \frac{x+y+z}{2}$ невозможно.

Каждая из k команд Восточной конференции участвует в 82 играх; значит, $82k = 2x + z$ (коэффициент 2 появился из-за того, что каждый внутренний матч учтён у обеих участвовавших в нём команд). Отсюда число $z = 82k - 2x$ чётно. Но из подсчёта общего числа матчей $x + y + z = \frac{30 \cdot 82}{2}$ следует, что число $\frac{x+y+z}{2} = 15 \cdot 41$ нечётно. Значит, равенство $z = \frac{x+y+z}{2}$ не может выполняться.

10.2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD. (*А. Кузнецов*)

Решение. Выберем на прямой QP точку T такую, что $DT \perp DA$ (см. рис. 3). Поскольку $\angle APT = 90^\circ = \angle ADT$, точки A, P, D и T лежат на одной окружности. Значит, центр окружности ω_1, описанной около треугольника APD, лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку DT.

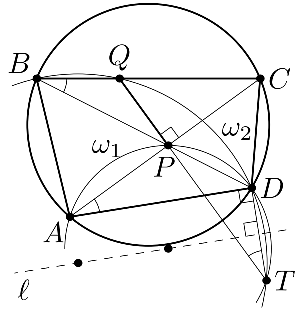


Рис. 3

Так как четырехугольник $ABCD$ вписан, имеем $\angle QBD = \angle PAD$. Четырехугольник $APDT$ также вписан, откуда $\angle PAD = \angle QTD$. Итак, $\angle QBD = \angle PAD = \angle QTD$; значит, точки B, Q, D и T лежат на одной окружности. Поэтому центр окружности ω_2, описанной около треугольника BQD, также лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку DT. Таким образом, прямая ℓ проходит через центры ω_1 и ω_2. Поскольку $\ell \perp DT$ и $AD \perp DT$, получаем $\ell \parallel AD$, что и требовалось.

10.3. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* тройку различных чисел (a, b, c) таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.

(*А. С. Голованов*)

Решение. Предположим противное; тогда у каких-то четырёх циклов (a_i, b_i, c_i) суммы чисел одинаковы и равны некоторому s. Для каждого из этих циклов имеем

$$s = a_i + b_i + c_i = a_i + f(a_i) + f(f(a_i)) = \\ = b_i + f(b_i) + f(f(b_i)) = c_i + f(c_i) + f(f(c_i)).$$

Итак, все 12 чисел наших четырёх циклов — корни многочлена $g(x) = x + f(x) + f(f(x)) - s$. Однако все эти 12 чисел по условию различны, а степень многочлена $g(x)$ равна 9; значит, у него не может быть больше 9 различных корней. Противоречие.

10.4. Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася. (*С. Берлов, Ф. Петров*)

Решение. Раскрасим стороны 100-угольника в чёрный и белый цвета так, чтобы любые две соседних стороны имели разные цвета. Рассмотрим две одноцветных стороны AB и CD, образующие выпуклый четырёхугольник $ABCD$; пусть его диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Предположим, что точка X лежит в треугольнике KBC (см. рис. 4). Покажем, как Петя может выиграть в этом случае.

Пусть он выберет первым ходом вершины B и C. После этого оба игрока могут выбирать только вершины, лежащие в другой полуплоскости от прямой BC, нежели точка X. Этих вершин чётное число, поскольку они разбиваются на пары вершин, образующих стороны того же цвета, что и AB. Поэтому последний ход будет за Петей.

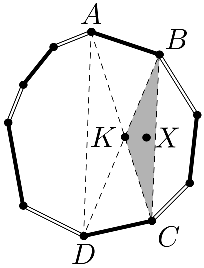


Рис. 4

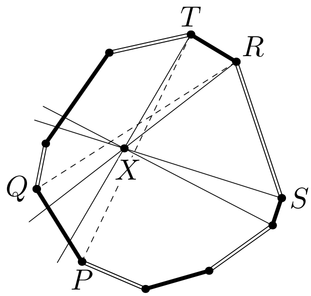


Рис. 5

Осталось показать, что такие стороны AB и CD найдутся. Пусть это не так. Рассмотрим любую вершину T. Предположим, что луч TX пересекает чёрную сторону PQ (см. рис. 5). Пусть TR — чёрная сторона, выходящая из T; можно считать, что $TRPQ$ — выпуклый четырёхугольник. Если точка X лежит внутри треугольника TRQ, то требуемый четырёхугольник $RTQP$ найден; в противном случае луч RX тоже должен пересекать отрезок PQ.

Пусть RS — следующая за TR сторона 100-угольника. Если луч SX пересекает белую сторону, то аналогично доказывается, что луч RX также должен её пересекать, что не так. Значит, SX пересекает какую-то чёрную сторону, и можно повторить предыдущие рассуждения для вершины S. Рассуждая так и дальше, мы получим, что для каждой чёрной стороны $T'R'$ найдётся чёрная сторона $P'Q'$, которую пересекают оба луча $T'X$ и $R'X$. Однако это неверно для чёрной стороны PQ (лучи PX и QX пересекают участки контура QT и RP соответственно) — противоречие.

11 класс

11.1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей? (*А. Грибалко*)

Ответ. Нет, не сможет.

Решение. См. решение задачи 10.1.

11.2. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке. (*П. Кожевников*)

Решение. Для любого отрезка XY *серединным перпендикуляром* к этому отрезку назовём плоскость, перпендикулярную ему и проходящую через его середину, т. е. геометрическое место точек, равноудалённых от X и Y.

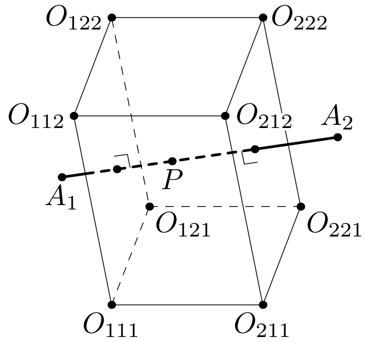


Рис. 6

Все точки вида O_{1jk} лежат в серединном перпендикуляре α_1 к отрезку PA_1. Аналогично, все точки O_{2jk} лежат серединном перпендикуляре α_2 к отрезку PA_2; заметим, что $\alpha_1 \parallel \alpha_2$.

Аналогично введём плоскости β_j — серединные перпендикуляры к отрезкам PB_j, и плоскости γ_k — серединные перпендикуляры к отрезкам PC_k. Тогда точки O_{ijk} — вершины параллелепипеда, образованного плоскостями α_i, β_j и γ_k. Теперь утверждение задачи следует из того, что диагонали этого параллелепипеда пересекаются в одной точке — его центре симметрии.

11.3. На клетчатый лист бумаги размера 100×100 положили несколько попарно неперекрывающихся картонных равнобедренных прямоугольных треугольничков с катетом 1; каждый треугольничек занимает ровно половину одной из клеток. Оказалось, что каждый единичный отрезок сетки (включая граничные) накрыт ровно одним катетом треугольничка. Найдите наибольшее возможное число клеток, не содержащих ни одного треугольничка.

(*Д. Храмцов*)

Ответ. $49 \cdot 50 = 2450$ клеток.

Решение. Положим $n = 50$. Назовём треугольничек *верхним*, если он расположен сверху от прямой, содержащей его горизонтальный катет, и *нижним* иначе. Пронумеруем горизонтальные *линии* сетки снизу вверх числами от 0 до $2n$.

Обозначим через u_k (соответственно d_k) число отрезочков k-й линии, участвующих в верхних (соответственно нижних) треугольничках; тогда $u_k + d_k = 2n$ и $u_0 = d_{2n} = 2n$. Кроме того, вертикальные отрезки сетки, расположенные между k-й и $(k+1)$-й линиями, участвуют ровно в $u_k + d_{k+1}$ треугольничках, так что $u_k + d_{k+1} = 2n + 1$. Отсюда несложно получить, что $d_k = k$ и $u_k = 2n - k$ при всех k.

Рассмотрим теперь клетки, расположенные между k-й и $(k+1)$-й линиями сетки. Хотя бы $u_k = 2n - k$ из этих клеток содержат по верхнему треугольнику, и хотя бы $d_{k+1} = k + 1$ из них содержат по нижнему. Значит, свободных клеток в этом ряду не больше, чем $2n - \max(u_k, d_{k+1})$, то есть не больше k при $k < n$ и не больше $(2n-1) - k$ при $k \geqslant n$. Итого, общее число свободных клеток не больше, чем $2(0+1+\ldots+(n-1)) = n(n-1)$.

Осталось привести пример, на котором эта оценка достигается. На рис. 7 показан пример при $n = 4$. Пример при $n = 50$ строится аналогично: выделяется «прямоугольник» из клеток со сторонами из $n+1$ и n клеток, параллельными диагоналям доски, его клетки красятся в шахматном порядке (так, что угловые клетки прямоугольника — чёрные), и во все чёрные клетки кладётся по два треугольничка (при этом $n(n-1)$ белых клеток остаются свободными); в оставшихся же четырёх «углах» доски треугольнички кладутся так, что прямой угол треугольника «направлен» в ту же сторону, что и весь «угол».

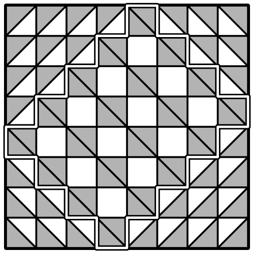


Рис. 7

11.4. В координатном пространстве провели все плоскости с уравнениями $x \pm y \pm \pm z = n$ (при всех целых n). Они разбили пространство на тетраэдры и октаэдры. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) с рациональными координатами не лежит ни в одной проведённой плоскости. Докажите, что найдётся натуральное k, при котором точка (kx_0, ky_0, kz_0) лежит строго внутри некоторого октаэдра разбиения. (*А. Глазырин*)

Решение. Лемма. *Пусть рациональные числа a, b, c и $a+$ $+b+c$ — нецелые. Тогда существует такое натуральное k, что числа ka, kb и kc нецелые, причём $1 < \{ka\} + \{kb\} + \{kc\} < 2$.*

Доказательство. Заменяя числа a, b и c на их дробные части, можно считать, что они лежат в интервале $(0, 1)$. Обозначим $f(t) = \{ta\}+\{tb\}+\{tc\}$. Заметим, что при $1 < a+b+c < 2$ можно положить $k = 1$.

Пусть $a+b+c < 1$. Выберем такое натуральное m, что ma, mb и mc — целые. Тогда $f(m-1) = f(-1) = 3-(a+b+c) > 2$. Значит, существует наименьшее натуральное k, при котором $f(k) > 1$ (тогда $f(k-1) \leqslant 1$). Покажем, что это k удовлетворяет всем требованиям.

Из неравенства $\{ka\} \leqslant \{(k-1)a\} + a$ и аналогичных, получаем

$$f(k) \leqslant f(k-1) + (a+b+c) < f(k-1) + 1 < 2. \qquad (*)$$

Значит, осталось показать, что числа ka, kb и kc нецелые. Предположим, что, скажем, ka — целое. Тогда $\{ka\} = \{(k-1)a\}+a-1$, поэтому оценку $(*)$ можно усилить как $f(k) \leqslant f(k-1) + (a+b+$ $+ c) - 1 < f(k-1) \leqslant 1$; но это противоречит выбору k. Итак, в случае $a + b + c < 1$ требуемое k найдено.

Наконец, если $a + b + c > 2$, достаточно применить уже доказанное утверждение к числам $a' = 1 - a$, $b' = 1 - b$ и $c' = 1 - c$. Ясно, что число k, подходящее для этих чисел, подойдёт и для исходных. $\square$

Перейдём к решению задачи. Вдобавок к данному координатному пространству $Oxyz$ введём *новое пространство* $Oabc$. Точке (x, y, z) из старого пространства сопоставим точку (a, b, c) из нового с координатами $a = y + z - x$, $b = x - y + z$, $c = x + y - z$; тогда $x = \dfrac{b+c}{2}$, $y = \dfrac{a+c}{2}$, $z = \dfrac{a+b}{2}$. Заметим, что $x + y + z = a + b + c$. Тогда разбиение старого пространства соответствует разбиению нового плоскостями вида $a = n$, $b = n$, $c = n$ и $a+b+c = n$. Положим $a_0 = y_0 + z_0 - x_0$, $b_0 = x_0 - y_0 + z_0$, $c_0 = x_0 + y_0 - z_0$; по условию, числа a_0, b_0, c_0 и $a_0 + b_0 + c_0$ — нецелые.

Рассмотрим некоторую точку (u, v, w) *нового* пространства с нецелыми координатами. Она попадает в некоторый куб вида $A \leqslant a \leqslant A + 1$, $B \leqslant b \leqslant B + 1$, $C \leqslant c \leqslant C + 1$. Этот куб пересекают две «наклонных» плоскости $a + b + c = A + B + C + 1$ и $a + b + c = A + B + C + 2$, которые разбивают его на два тетраэдра и (неправильный) октаэдр. При этом точка (u, v, w) попадёт внутрь октаэдра, если она окажется в полосе между указанными плоскостями, т. е. если $1 < \{u\} + \{v\} + \{w\} < 2$. Значит, применив лемму к числам a_0, b_0, c_0, мы найдём значение k, удовлетворяющее требованиям задачи.