9 класс

Второй день

9.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

9.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

9.7. Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.

9.8. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

9.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

9.7. Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.

9.8. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

10 класс

Второй день

10.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

10.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

10.7. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырех написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными?

10.8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.

XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

10.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

10.7. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырех написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными?

10.8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.

11 класс

Второй день

11.5. Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \ldots + *x + *$ так, чтобы полученный многочлен не имел *целых* корней. Обязательно ли это можно сделать?

11.6. В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016.

11.7. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

11.8. В треугольнике ABC медианы AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в точке M. Построим окружность Ω_A, проходящую через середину отрезка AM и касающуюся отрезка BC в точке M_A. Аналогично строятся окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку.

XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \ldots + *x + *$ так, чтобы полученный многочлен не имел *целых* корней. Обязательно ли это можно сделать?

11.6. В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016.

11.7. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

11.8. В треугольнике ABC медианы AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в точке M. Построим окружность Ω_A, проходящую через середину отрезка AM и касающуюся отрезка BC в точке M_A. Аналогично строятся окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку.